

ИССЛЕДОВАНИЕ ЭВОЛЮЦИИ ПРОСТРАНСТВЕННОГО КАВИТАЦИОННОГО ПУЗЫРЯ ОКОЛО ТВЕРДОЙ СТЕНКИ В ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ НАЛИЧИИ ПОВЕРХНОСТНОГО НАТЯЖЕНИЯ

К.Е. Афанасьев, И.В. Григорьева

*Кемеровский государственный университет
Кемерово, ул. Красная 6, ЦНИТ, irene@kemsu.ru*

Постановка задачи. Рассмотрим эволюцию пространственного пузыря с поверхностью $\Gamma(t)$, расположенного на расстоянии d от твердой стенки в области $\Omega(t)$. В $\Omega(t)$ происходит бивихревое движение однородной несжимаемой жидкости с плотностью ρ , вызванное как наличием массовых сил, так и разностью давлений в жидкости и газопаровой смеси в пузыре [1]. Потенциал поля скоростей удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta \varphi = 0, \quad x \in \Omega, \quad (1)$$

а также кинематическому и динамическому условиям на границе пузыря

$$dx \, dt = \nabla \varphi, \quad x \in \Gamma(t), \quad (2)$$

$$d\varphi \, dt = 1 + \frac{1}{2} |\nabla \varphi|^2 - \alpha z - \beta (V_0 - V)^{\gamma} + We k, \quad x \in \Gamma(t), \quad (3)$$

где $\alpha = R_m \rho g \Delta p$, $\beta = p_0 \Delta p$, $\Delta p = p_{\infty} - p_n$, p_{∞} – давление на бесконечности, R_m – максимальный радиус пузыря, $We = \delta R_m \Delta p$, δ – коэффициент поверхностного натяжения, k – средняя кривизна поверхности. Кроме того добавляется условие непротекания на твердой стенке

$$(\nabla \varphi, \mathbf{n}) = 0, \quad (4)$$

а также условие, что на бесконечности жидкость покоится

$$|\nabla \varphi| \rightarrow 0, \quad |x| \rightarrow \infty. \quad (5)$$

Из экспериментов известно, что на ранних стадиях пузырь сохраняет сферическую форму в силу незначительности эффекта плавучести при малых размерах пузыря. Будем считать, что в начальный момент времени пузырь представляет собой сферу S_0 радиуса R_0 , а начальное приближение для потенциала поля скоростей может быть взято из уравнения о движении сфери-

ческого пузыря в безграничной идеальной несжимаемой жидкости в отсутствии сил тяжести, приведенного в работе [2]:

$$RR + 3 \cdot 2 R^2 = (p_n - p_\infty) \rho, \quad (6)$$

$$\Gamma(0) = S_0, \quad \varphi(0) = - \frac{2 \cdot 3 \left(a^3 - 1 - 3a^{3(1-r)}(a-1) \right)}{a}, \quad a = R_m / R_0. \quad (7)$$

Итак, необходимо из (1) – (5), (7) найти форму свободной поверхности и распределение потенциала на ней во все последующие моменты времени.

Численное моделирование. Поставленная нестационарная нелинейная краевая задача при численной реализации сводится к последовательности линейных задач на каждом временном шаге [3]. Для решения линейной задачи на временном шаге используется метод граничных элементов, в качестве основного соотношения которого используется третья формула Грина [4]:

$$C(x)\varphi(x) + \int_{\Gamma} \varphi(x, \xi) q^*(x, \xi) d\Gamma(\xi) = \int_{\Gamma} q(x, \xi) \varphi^*(x, \xi) d\Gamma(\xi),$$

где $q = \partial \varphi / \partial n$ – нормальная производная, n – внешний вектор нормали, φ^* – фундаментальное решение уравнения Лапласа, q^* – его нормальная производная, $r(x, \xi)$ – расстояние между точками x и ξ , $C(x) = \omega(x) / 2\pi$. Здесь $\omega(x)$ – телесный угол, под которым видна поверхность из точки x . Функция φ^* выбирается так, чтобы она тождественно удовлетворяла условию непротекания на твердой стенке. Таким способом можно избежать дискретизации твердой стенки, что позволяет значительно снизить вычислительные затраты.

Шаг по времени выбирается так, чтобы любая точка на свободной поверхности за один шаг по времени прошла расстояние не больше заданного.

Поверхность аппроксимируется набором плоских треугольных элементов. Считается, что на элементах функции φ и q изменяются линейно.

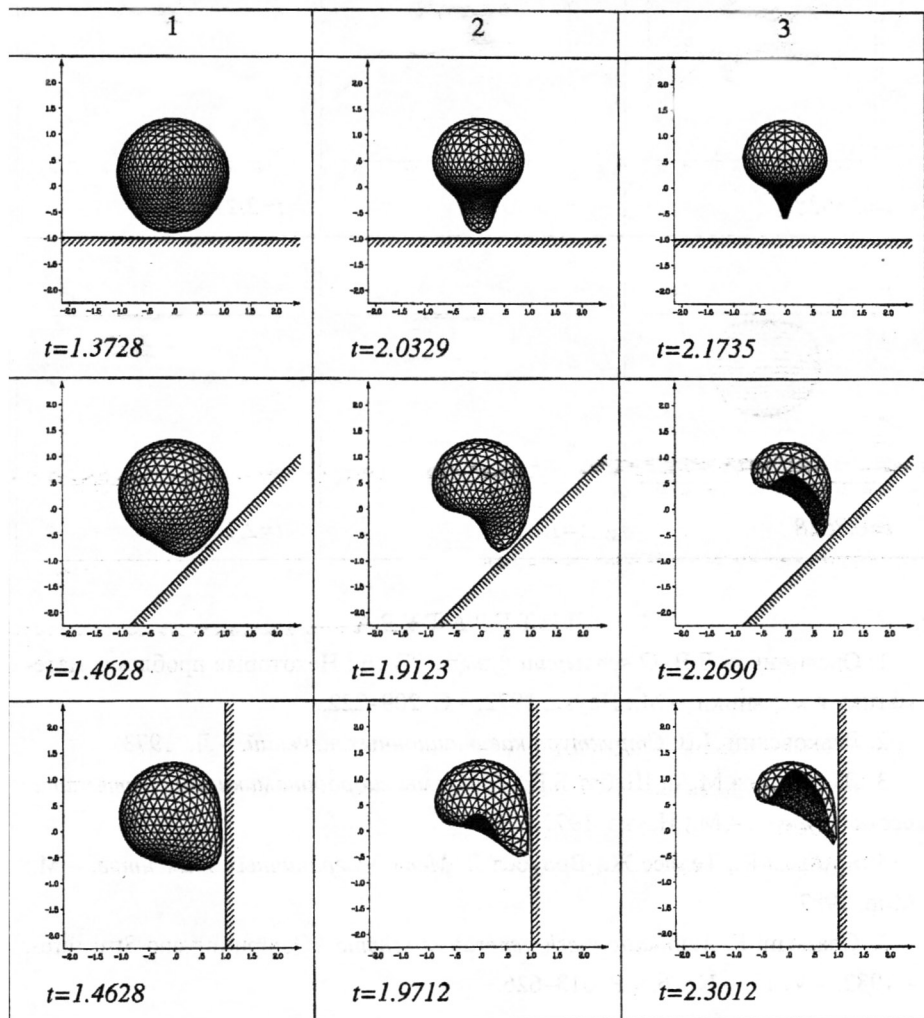
В работе были реализованы два алгоритма построения сеток. Идея первого заключается в разбиении исходной поверхности на отдельные треугольные опорные зоны, каждая из которых, отображаясь на каноническую область, делится на заданное число элементов. Обратное преобразование позволяет получить требуемую сетку на поверхности [5].

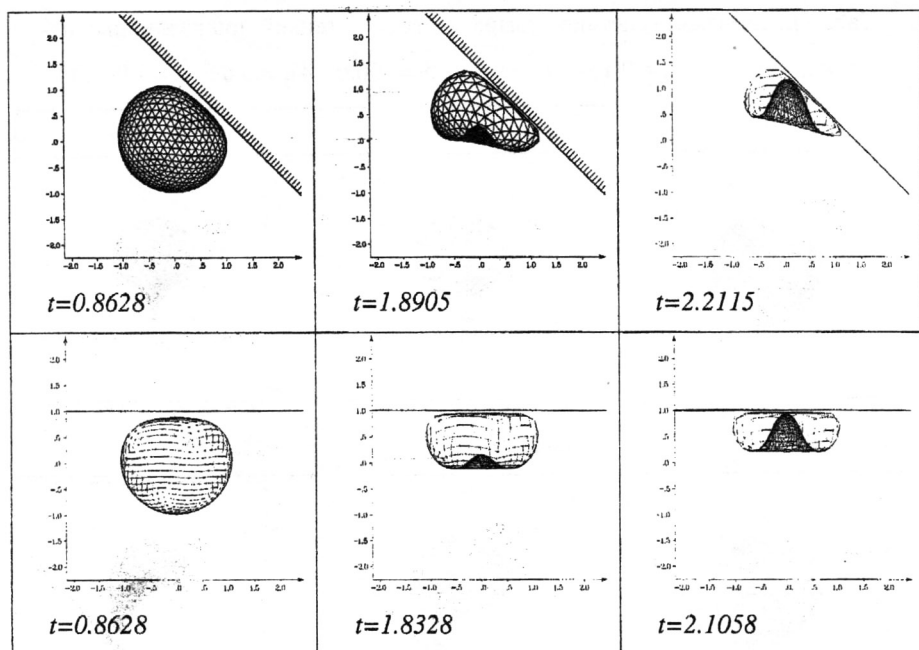
Начальным приближением сферы для второго алгоритма является икосаэдр, каждое его ребро делится пополам новым узлом, полученные узлы сдвигаются на поверхность сферы и объединяются в новый элемент. На каждом новом уровне дискретизации каждый элемент предыдущего уровня преобразуется в четыре новых элемента.

Результаты расчетов. В качестве тестовой задачи использовалось аналитическое решение уравнения (6), полученное Рэлеем [2]. Проведенные расчеты показали хорошее соответствие известному аналитическому решению. Кроме того, проводилось сравнение расчетов пространственной задачи с подобной задачей при допущении об осевой симметрии течения, которое также показало хорошее соответствие результатов.

В таблице 1 приведены результаты расчетов при значениях параметров $R_0 = 0.1R_m$, $\alpha = 0.25$, $\beta = 100.0$, $We = 0.01$, $d = 1.0R_m$ для различного положения твердой стенки, для всех расчетов иллюстрация фазы расширения пузыря опущена, так как на этой стадии пузырь сохраняет форму, близкую к сферической. К окончанию стадии расширения центр пузыря заметно смещается к твердой стенке, и происходит деформация пузыря со стороны твердой стенки. На этапе схлопывания формируется высокоскоростная струйка, направленная противоположно силе тяжести. При этом в случае наклонных и вертикальной стенок струйка отклоняется под влиянием твердой стенки, за исключением случая эволюции над горизонтальной стенкой, где в конце стадии расширения и на ранней стадии схлопывания пузырь вытягивается в направлении твердой стенки, после чего образуется острая струйка в направлении стенки, которая со временем подтягивается пузырем, и на конце этой струйки образуется другая острая струйка, направленная противоположно силе тяжести. Из-за сложности вычислительного режима не удастся продолжить расчет дальше. Следует заметить, что при большем удалении от стенки ($d = 1.5$, $d = 2.0$) такой эффект уже не наблюдается, образуется менее острая струйка, направленная противоположно силе тяжести, в остальных случаях картина развития течения сохраняется, но влияние стенки заметно ослабевает.

Таблица 1. Взаимодействие пузыря с твердой стенкой при различных на-
клонах стенки ($R_0 = 0.1R_m$, $\alpha = 0.25$, $\beta = 100.0$, $We = 0.01$, $d = 1.0R_m$)





ЛИТЕРАТУРА

1. Овсянников Л.В. *О всплывании пузыря* // В сб.: Некоторые проблемы математики и механики. – М.: Наука, 1972. – С. 209–222.
2. Левковский Л.В. *Структура кавитационных течений*. – Л., 1973.
3. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. *Проблемы гидродинамики и их математические модели*. – М.: Наука, 1977.
4. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. *Методы граничных элементов*. – М.: Мир, 1987.
5. Ghassemi F. *Automatic mesh generation scheme* // Computing and Structures. – 1982. – V. 15. – No. 6. – P. 613–626.